第 30 回（平成 24 年度）大阪科学賞表彰式・記念講演　その２

大域解析学と代数解析学の交錯

京都大学数理解析研究所　教授　望月　拓郎　氏

このたびは大阪科学賞をいただき、大変光栄に存じます。これまで御世話になった全ての方々に感謝の意を表します。全ての方々の御名前を挙げることはできませんが、研究上のつながりが特に深い Claude Sabbah 氏、Carlos Simpson 氏、齋藤盛彦氏、魅力的な予想を提示された柏原正樹先生、学生時代から畏敬の対象である深谷賢治先生、公私で御世話になってきた河野明先生、枡田幹也先生、土基善文氏、石井亮氏、これまで奉職してきた大阪市立大学数学教室、京都大学数学教室、京都大学数理解析研究所の同僚の方々に御礼を申し上げます。そして、今も元気でいてくれる両親に感謝します。

私は 1999 年 4 月から 2004 年 3 月までの 5 年間、大阪市立大学の数学教室に在籍しましたが、その頃の研究が今の自分の主要な業績に繋がっています。また、当時の教職員・学生の皆様にはとてもお世話になりました。今も心から感謝しています。そのようなこともあって、大阪科学賞を頂くのは私にとって特に嬉しいことです。その一方で、難儀なことになってしまったとも感じました。それは、私の研究を多くの方々に説明することに困難を感じるからです。そこで、なぜ私は数学の話をしづらいと感じているのか、というところから話を始めます。

数学の人達の営みの一つは、「数学の世界」を旅することです。その旅の過程で出くわした困難を解決したり、美しい風景や面白い対象をさらに調べることによって、結果として数学の世界における人類の活動領域を広げていきます。これはありふれた比喩的な表現にすぎませんが、数学の人達は単なる比喩以上のものと感じていると思います。

このような数学の人達の営みが人類と現実世界のあり方を変えてきましたし、これからも変えていくと思います。純粋に数学的な概念として導入されたものを通じて、人類は世界をより深く認識してきました。もともとは現実的対象を理解するために導入された数学的モデルが、数学の世界で抽象化され、洗練されることによって、元の目的を超えて普遍的な有用性を持つものになってきました。純粋に数学的な興味から研究されたものが現実世界で実際に役立っているという例もたくさんあります。ですから数学の意義、数学者の活動の意義を説明することは難しいことではありません。

その一方で、数学の個別の研究、例えば私の研究を説明することには難しさを感じます。研究の説明として主に求められるのは「研究そのものの説明」と「研究の意義の説明」の二つで

はないかと思います。「研究そのものの説明」とは、こんなものを調べているとか、こんなことが分かりますという話になると思いますが、数学の世界における「こんなもの」や「こんなこと」を説明するのはなかなか難しいことです。それは、数学の世界の対象について伝えるための技術が未発達だからです。日本で初めてフィールズ賞を受賞した小平邦彦先生の「一数学者の妄想」という文章にもあるように、数学を理解するということは「ある種の感覚によって数学的現象を知覚すること」であり、この「数覚」という能力が数学の研究では必要になってくるのです。そして、小平先生によれば「現代の数学の成果は数学者以外の人には絶対に分からないし、数学者でも同じ専門の数学者以外にはほとんど分からない」ものなので、数学の研究成果を伝えるのは難しいということになります。実際には、数学者同士であれば、専門外でもある程度は伝わるものですが。

次に、「研究の意義の説明」は社会的意義と学問上の意義という 2 つに分けられるかと思います。社会的意義としては、例えば画期的な新製品の開発や病気の治療に役立つことなどがわかりやすいと思います。しかし、数学の研究は近い将来に特定の目的に役立つことよりも遠い将来に根源的なところで役立つことが期待されるものですし、現実的な目的にとらわれ過ぎると本質的な発展には繋がらない、というのが数学の人達の基本的な考え方だと思います。また、学問上の意義としては、超難問が解けたというのはわかりやすいのですが、それに伴う数学の発展の方がはるかに重要です。私の研究で解決された「柏原予想」は 21 世紀半ばまでは解けないであろうと思われていた「難問」であり、その証明のために書いた分量は 1000 ページを超えますが、殊更に口にするのは恥ずかしいことです。そのような事情もあって研究の意義を「わかりやすく」説明するのは難しく感じられます。

さて、ここからは私が自分自身の研究で面白いと思ったことを一部でもお伝えしたいと思います。調和バンドルとツイスター D- 加群の研究で面白いと感じたことの一つは、幾つかの数学の分野が交錯する様子を目の当たりにしたことです。特に、大域解析学と代数解析学は比較的離れているようにみえる分野だったので、その交錯は興味深いものでした。

数学は、代数・幾何・解析の 3 つに大きく分けられ、さらに細分化されています。各分野が独自の問題意識を持ち、独自の研究手法を用いて非常に高度に発展していますので、異なる専門分野がうまく交錯すると、それぞれの強みを生かせるようになり問題意識も広がるので豊かな研究に結びつきます。

古い例で恐縮ですが、座標は、17 世紀にデカルトが幾何学に導入したもので、平面上の点を 2 つの数の組で表すことによって、様々な図形が式で表せるというものです。座標の導入によって幾何学に計算という手法が取り入れられるようになり、逆に、代数や解析に幾何学的直観が使えるようになるという、相互に利点があります。さらに、座標を使って運動を表現できるので、それが物理の発展にも繋がりました。これは、異なる分野が交錯することによって数学が豊かになった例のひとつです。

数学の面白い研究は、幾つかの分野や手法がうまく交錯したときになされます。調和バンドルとツイスター D- 加群では、大域解析学、代数解析学、代数幾何、トポロジーがうまく交錯しています。以下では、大域解析学と代数解析学という 2 つの分野とその交錯について説明したいと思います。

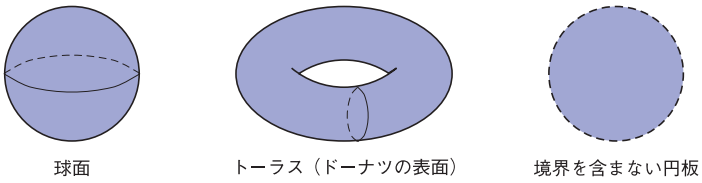
多くの自然法則が微分方程式として記述されていることもあって、微分方程式の研究は数学における最も重要な課題の一つです。しかし、一般の微分方程式は非常に難しい対象であり、実際に解を求めてその性質を調べる、というような素朴な方法ではすぐに行き詰ってしまいます。そこで、目的、興味を持つ対象、用いる手法などを絞ってアプローチすることになり、大域解析学や代数解析学など様々な分野に細分化されていきます。

多様体とは現代数学における主要な研究対象の一つであり、球面やトーラスといった図形の一般化です。球面やトーラスのように「閉じている」ものをコンパクト多様体といい、境界を含まない円板のような「閉じていない」ものを非コンパクト多様体といいます。そして、乱暴な言い方になりますが、コンパクト多様体上で楕円型方程式（ラプラス方程式の一般化）を調べるのが大域解析学です。

大域解析学は 20 世紀以降の数学の世界的な主潮流のひとつになっていて、Hodge- 小平分解や、M.Atiyah-M.Singer の指数定理、調和写像の存在定理、Calabi 予想の解決、ゲージ理論のトポロジーなど、既に古典となっている深い研究が多数あります。そして、大域解析学の強いところは、局所的な性質と大域的な性質を結びつけるところです。つまり、各部分ごとに述べられる条件と、全体があって初めて述べられる大域的な条件を結びつけるのが大域解析学の研究のテーマの一つといえます。

一方、線形偏微分方程式から「形」を取り去った「実体」である D- 加群を研究するのが代数解析学です。「形」を忘れることで、与えられた対象から別の対象をつくり出す一般論（関手性）をかなり自由自在に使えるようになります。D- 加群の中でも特に重要なのがホロノミック D- 加群です。柏原や Mebkhout によって示された正則ホロノミック D- 加群と偏屈層の間の Riemann-Hilbert 対応や、旗多様体上の同変 D- 加群とリー群の表現の間の Beilinson-Bernstein 対応などにみられるように、ホロノミック D- 加群はいろいろな数学的対象の生まれ変わりになっています。そのため、線形偏微分方程式の研究という枠を超えて、現代数学における最も重要な研究対象の一つとなっています。

D- 加群は単純ホロノミック D- 加群と呼ばれる基本部品から作られます。単純ホロノミック D- 加群を寄せ集めただけでつくられる D- 加群のことを半単純ホロノミック D- 加群といいます。一般の D 加群はより複雑なものとなります。上で述べた関手性のうち、積分や近傍サイクル関手を半単純ホロノミック D- 加群に適用しても半単純性が本質的には保たれるであろうというのが

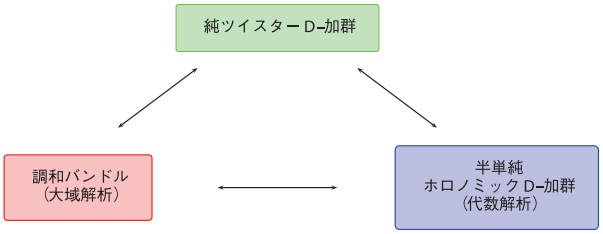


球面　トーラス（ドーナツの表面）境界を含まない円板

柏原の予想です。これは代数解析において基礎的な重要性を持つだけでなく現代数学の非常に深い部分に連なる問題です。

Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber による研究（モチーフ的 D- 加群の場合）、齋藤盛彦による研究（ホッジ加群の場合）がありますが、それぞれがきわめて深い理論に基づくものです。そして、柏原の予想はこれらの結果の大きな一般化を意味します。その柏原の予想が、大域解析学と代数解析学の交錯、つまり大域解析の強み（局所的な性質と大域的な性質を関連づける）と代数解析の強み（関手性）がうまく組み合わされることによって解決されたのでした。

（大域解析と代数解析のつながり）



異なる分野をつなぐとそれぞれの強みを活かせる（例：座標）

調和バンドルというものが私の主要な研究対象です。これはある非線形な楕円型偏微分方程式の解です。非コンパクト空間上での調和バンドルの解析、特に無限遠における振舞い（漸近挙動）が、パラボリック構造・ストークス構造・極限混合ツイスター構造によってどのように制御されるかを、私は詳しく調べました。その結果を用いて射影多様体上の有理型平坦バンドルと有理型ヒッグスバンドルと調和バンドルの間の対応を確立しました。また有理型平坦バンドルの「変わり目点」という非常に悪い特異点を、双有理射によって解消できることを示し、上で述べた対応も用いることで半単純有理型平坦バンドルと調和バンドルの間の対応を得ました。これらの知見に基づいて、純ツイスター D- 加群と調和バンドルの間の対応を確立し、純ツイスター D- 加群が大域解析学的な性質と代数解析学的な性質をあわせ持つものであることを示しました。そして純ツイスター D- 加群と半単純ホロノミック D- 加群の対応を確立することで、半単純性が関手性を持つこと、すなわち柏原の予想を解決できたのでした。

※本内容は、受賞記念講演を要約したものです。

【講師紹介】　望月　拓郎　氏
現職：京都大学数理解析研究所　教授

平成11年　京都大学大学院理学研究科博士数学・数理解析専攻博士課程卒業
平成11年　大阪市立大学理学部助手
平成13年　大阪市立大学大学院理学研究科助手（組織がえ）
平成16年　京都大学大学院理学研究科助教授
平成19年　京都大学大学院理学研究科准教授（学校教育法改正）
平成20年　京都大学数理解析研究所准教授
平成24年　京都大学数理解析研究所教授